

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ-ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

$$\alpha) f(x) = \sqrt{\ln(1-x)} \quad \beta) f(x) = \frac{\sqrt{3-|2-x|}}{\ln x} \quad \gamma) f(x) = \frac{\sqrt{1-\ln x}}{x-2}$$

$$\delta) f(x) = \sqrt{9-x^2} + \sqrt{4x+x^2} \quad \epsilon) f(x) = \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x-2}}$$

$$\sigma\tau) f(x) = \frac{2x}{e^{2x}-5e^x+6} \quad \zeta) f(x) = \sqrt{2\ln^2 x + \ln x}$$

$$\eta) f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \quad \theta) f(x) = \frac{\ln x^2}{e^{\sqrt{x}}} \quad \iota) f(x) = \frac{\sqrt{-x^2+4x+5}}{\ln x}$$

2. Να βρείτε τη συνάρτηση $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^2(x) = 4e^x(f(x) - e^x).$$

3. Να βρείτε τη συνάρτηση $f: \mathcal{R}^* \rightarrow \mathcal{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x$$

4. Έστω ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \kappa \ln(x+1) + \lambda$ τέμνει τον άξονα xx' στο σημείο $e^2 - 1$ και τον άξονα yy' στο σημείο 2.

α) Να βρείτε τους αριθμούς κ, λ β) Να βρείτε το σημείο της C_f που έχει τεταγμένη 3.

5. Έστω συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύει: $g(x) = f^2(x) - 2f(x) + x^2 + 3$ για κάθε $x \in \mathcal{R}$. Να δείξετε ότι η C_g τέμνει τον θετικό ημιάξονα Oy .

6. Έστω συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathcal{R}$ για την οποία ισχύει: $f^2(x) - f(x) - 1 = x(x-1)$ για κάθε $x \in A$. Να δείξετε ότι η C_f δεν τέμνει τον άξονα xx' .

7. Να βρείτε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
 $2xf(x) + f(-x) = x, x \in \mathbb{R}$.

8. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

α) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ και $g(x) = x^2 + x + 1$.

β) $f(x) = x \ln x - 2x$ και $g(x) = x$.

γ) $f(x) = e^x \ln x + 6$ και $g(x) = 3 \ln x + 2e^x$.

9.) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(|x-2|+a), a \in \mathbb{R}$. Αν το $A(4,0)$ ανήκει στην C_f να βρείτε:

α) τον αριθμό a και το πεδίο ορισμού της f .

β) τα διαστήματα της C_f που είναι πάνω από τον άξονα xx'

10. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων και να βρείτε το σύνολο τιμών τους.

α) $f(x) = \ln(ex)$ β) $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ e^x, & x > 0 \end{cases}$ γ) $f(x) = \ln|x|$. δ) $f(x) = e^{|x|}$.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{\sqrt{x+1}}$. Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f

με τους άξονες.

12. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:
 $(f(x) + g(x))^2 = 4f(x)g(x), x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

13. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ίσες. Στις περιπτώσεις που δεν είναι να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του \mathbb{R} στο οποίο είναι ίσες.

α) $f(x) = \frac{x^2 - 2|x|}{x^2}$ και $g(x) = \frac{|x| - 2}{|x|}$.

β) $f(x) = \ln(9 - x^2) - \ln(x+3)$ και $g(x) = \ln(-x+3)$

γ) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$ και $g(x) = \sqrt{x^2+1} + x$

δ) $f(x) = \frac{e^{2x} - xe^x}{xe^x}$ και $g(x) = \frac{e^x}{x} - 1$