

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

42. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x$ είναι ο άξονας συμμετρίας των f και f^{-1} .

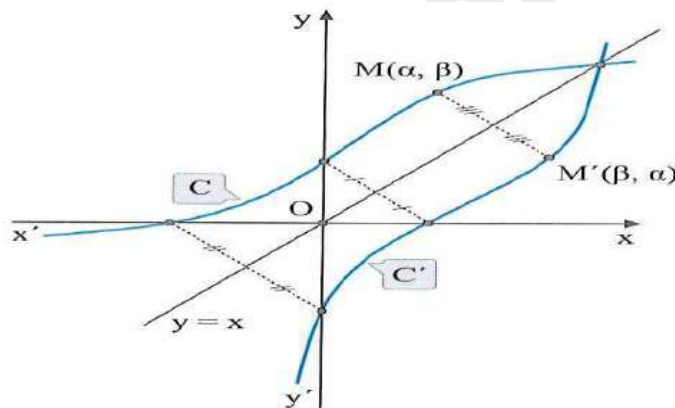
Απάντηση:

Ας πάρουμε μια 1-1 συνάρτηση f και ας θεωρήσουμε τις γραφικές παραστάσεις C και C' των f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων. Επειδή:

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x,$$

αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C της f , τότε το σημείο $M'(\beta, \alpha)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1} και αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$. Επομένως:

Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.



43. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$.

Απάντηση:

Σύμφωνα με τις ιδιότητες των ορίων έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_v x^v) + \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_{v-1} x^{v-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0$$

$$= \alpha_v \lim_{x \rightarrow x_0} x^v + \alpha_{v-1} \lim_{x \rightarrow x_0} x^{v-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0 = \alpha_v x_0^v + \alpha_{v-1} x_0^{v-1} + \dots + \alpha_0 = P(x_0).$$

44. Έστω $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

Απάντηση:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} \text{ εφόσον } Q(x_0) \neq 0.$$

45. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0) = \eta$$

Απάντηση:

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$ (Σχ. 67). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta) < 0$,

αφού $g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$.

