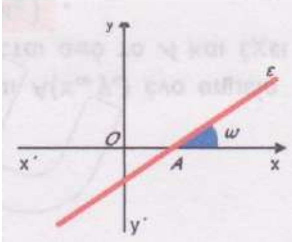
6.2 Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας

Ορισμός: Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και ε μια ευθεία που τέμνει τον άξονα xx΄ στο σημείο A. Τη γωνία ω που διαγράφει ο άξονας xx΄ όταν στραφεί γύρω από το A κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπέσει με την ευθεία ε τη λέμε **γωνία που σχηματίζει η ε με τον άξονα xx΄.**



Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη προς τον άξονα xx΄, τότε λέμε ότι σχηματίζει με αυτόν γωνία $\omega = 0$.

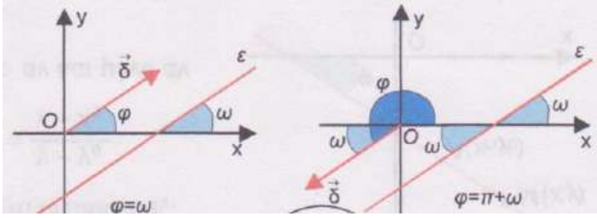
- Σε κάθε περίπτωση για τη γωνία ω ισχύει $0^o \le \omega < 180^o$.

Ορισμός: Ονομάζουμε **συντελεστή διεύθυνσης** μιας ευθείας ε την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα xx΄.

- Στην περίπτωση που η γωνία της ευθείας ε με τον άξονα xx΄ είναι 90^o, δηλαδή η ευθεία ε είναι κάθετη στον άξονα xx΄, δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης.

Θεώρημα: Όταν μια ευθεία και ένα διάνυσμα είναι παράλληλα, τότε έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.

Απόδειξη: Έστω ένα διάνυσμα $\vec{\delta}$ παράλληλο σε μια ευθεία ε. Αν φ και ω είναι οι γωνίες που σχηματίζουν το $\vec{\delta}$ και η ε με τον xx΄ αντίστοιχα, τότε θα ισχύει $\varphi = \omega$ ή $\varphi = \pi + \omega$



Επομένως σε κάθε περίπτωση ισχύει $\varepsilon\varphi\varphi = \varepsilon\varphi\omega$. Άρα $\lambda_1 = \lambda_2$.

<u>Θεώρημα:</u> Ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, με $x_1 \neq x_2$ είναι ίσος με $\lambda = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

<u>Απόδειξη:</u> Ο συντελεστής διεύθυνσης της ε είναι ίσος με το συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, δηλαδή ίσος με $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
Επομένως $\lambda = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

<u>6.3 Συνθήκες καθετότητας και παραλληλίας ευθειών</u>

<u>Θεώρημα:</u> Αν ε_1, ε_2 είναι δύο ευθείες με αντίστοιχους συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2, τότε ισχύουν:

- $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \;\Leftrightarrow\; \lambda_1 = \lambda_2$
- $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \;\Leftrightarrow\; \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$.

<u>Απόδειξη:</u> Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\delta_1}$ και $\vec{\delta_2}$ παράλληλα προς τις ε_1 και ε_2 αντίστοιχα, οπότε έχουμε τις ισοδυναμίες:

- $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \;\Leftrightarrow\; \vec{\delta_1} // \vec{\delta_2} \;\Leftrightarrow\; \lambda_1 = \lambda_2$ και
- $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \;\Leftrightarrow\; \vec{\delta_1} \perp \vec{\delta_2} \;\Leftrightarrow\; \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

<u>6.4 Εξίσωση ευθείας</u>

<u>Θεώρημα:</u> Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $\mathrm{A}(x_0, y_0)$ ένα σημείο του επιπέδου. Η εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το Α και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι:

$$\boxed{y - y_0 = \lambda(x - x_0)}$$

<u>Απόδειξη:</u> Ένα σημείο $M(x, y)$ διαφορετικό του $\mathrm{A}(x_0, y_0)$ ανήκει στην ε, αν και μόνο αν το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ είναι παράλληλο στην ε, δηλαδή αν και μόνο αν το $\overrightarrow{AM}$ και η ε έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.