ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

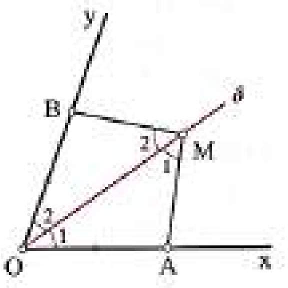
Κεφ. 3 : Τρίγωνα

Κριτήρια ισότητας τριγώνων (Θέμα 2)

1

α) Τα τρίγωνα ΟΜΑ και ΟΜΒ έχουν:

- την ΟΜ κοινή πλευρά,
- ΟΑ = ΟΒ, από υπόθεση,
- $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$, διότι η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας $x\widehat{O}y$.



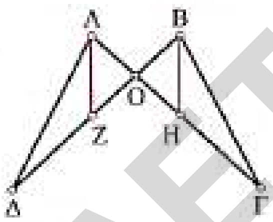
Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΟΜΑ και ΟΜΒ είναι ίσα, άρα ισχύει ότι ΜΑ = ΜΒ.

β) Από τα ίσα τρίγωνα ΟΜΑ και ΟΜΒ έχουμε επίσης ότι $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$. Άρα η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\widehat{M}B$.

2

α) Τα τρίγωνα ΑΟΔ και ΒΟΓ έχουν:

- ΟΑ = ΟΒ, από υπόθεση,
- $A\widehat{O}\Delta = B\widehat{O}\Gamma$, ως κατακορυφήν,
- ΟΔ = ΟΓ, ως διαφορά των ίσων τμημάτων ΒΔ = ΑΓ και ΟΒ = ΟΑ.



Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΟΔ και ΒΟΓ είναι ίσα, άρα ισχύει ότι $A\widehat{\Delta}O = B\widehat{\Gamma}O$.

β) Τα τρίγωνα ΑΟΖ και ΒΟΗ έχουν:

- ΟΑ = ΟΒ, από υπόθεση,
- $A\widehat{O}Z = B\widehat{O}H$, ως κατακορυφήν,
- ΟΖ = ΟΗ, από υπόθεση.

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΟΖ και ΒΟΗ είναι ίσα, άρα ισχύει ότι ΑΖ = ΒΗ.

3

α) Το Μ είναι μέσο της ΒΓ, άρα:

$$B\Gamma = 2BM \iff 2BE = 2BM \iff BE = BM$$

Άρα το τρίγωνο ΒΕΜ είναι ισοσκελές και ισχύει ότι:

$$B\widehat{E}M = B\widehat{M}E \iff 180^\circ - A\widehat{E}B = 180^\circ - E\widehat{M}\Gamma \iff$$
$$\iff A\widehat{E}B = E\widehat{M}\Gamma$$

β) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΕΜΓ έχουν:

- ΑΕ = ΕΜ, διότι το Ε είναι μέσο της ΑΜ,
- ΕΒ = ΜΓ, ως μισά της ΒΓ,
- $A\widehat{E}B = E\widehat{M}\Gamma$, από το ερώτημα (α).

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΕΜΓ είναι ίσα, άρα ισχύει ότι ΑΒ = ΕΓ.

4

α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ έχουν:

- ΑΒ = ΑΓ, από υπόθεση,
- την ΑΔ κοινή πλευρά,
- $B\widehat{A}\Delta = \Gamma\widehat{A}\Delta$, ως άθροισμα των ίσων γωνιών $\hat{\alpha} = \hat{\delta}$ και $\hat{\beta} = \hat{\gamma}$.

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα.

β) Τα τρίγωνα ΕΔΑ και ΖΔΑ έχουν:

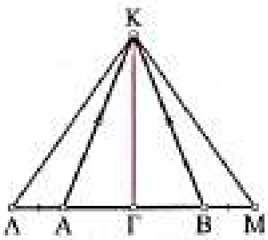
- $\hat{\beta} = \hat{\gamma}$, από υπόθεση,
- την ΑΔ κοινή πλευρά,
- $E\widehat{\Delta}A = Z\widehat{\Delta}A$, από τα ίσα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ.

Από το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα ΕΔΑ και ΖΔΑ είναι ίσα, οπότε ισχύει ότι $\hat{\varepsilon} = \hat{\zeta}$.

5

α) Τα τρίγωνα ΚΑΛ και ΚΒΜ έχουν:

- ΚΑ = ΚΒ, από υπόθεση,
- ΑΛ = ΒΜ, από υπόθεση,
- $K\widehat{A}\Lambda = K\widehat{B}M$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $K\widehat{A}B = K\widehat{B}A$ (προσκείμενες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΚΑΒ).



Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΚΑΛ και ΚΒΜ είναι ίσα, άρα ΚΛ = ΚΜ. Συνεπώς το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισοσκελές.

β) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΚΑΒ, η ΚΓ είναι διχοτόμος, άρα είναι και διάμεσος. Δηλαδή ισχύει ότι:

$$A\Gamma = \Gamma B \qquad (1)$$

Επίσης είναι:

$$A\Lambda = BM \qquad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2), προκύπτει ότι:

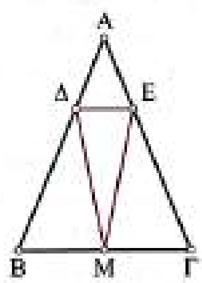
$$A\Gamma + A\Lambda = \Gamma B + BM \iff \Lambda\Gamma = \Gamma M$$

Δηλαδή το Γ είναι μέσο της ΛΜ, άρα η ΚΓ είναι διάμεσος του τριγώνου ΚΛΜ.

6

α) Έχουμε:

$$B\Delta = AB - A\Delta \iff$$
$$\iff B\Delta = AB - \frac{AB}{3} \iff$$
$$\iff B\Delta = \frac{2AB}{3} \qquad (1)$$



Ομοίως είναι:

$$\Gamma E = \frac{2A\Gamma}{3} \qquad (2)$$

Επειδή ΑΒ = ΑΓ, από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι ΒΔ = ΓΕ.

β) Τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΕΓ έχουν:
- ΜΒ = ΜΓ, διότι το Μ είναι μέσο της ΒΓ,
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, ως γωνίες προσκείμενες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ,
- ΒΔ = ΓΕ, από το ερώτημα (α).

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΕΓ είναι ίσα.

γ) Από τα ίσα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΕΓ έχουμε ότι:

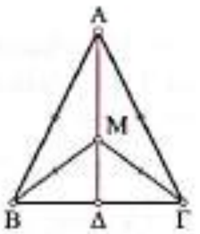
$$M\Delta = ME$$

άρα το τρίγωνο ΔΕΜ είναι ισοσκελές.

7

α) Τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΑΜΓ έχουν:
- την ΑΜ κοινή πλευρά,
- ΑΒ = ΑΓ, από υπόθεση,
- ΜΒ = ΜΓ, από υπόθεση.

Από το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΑΜΓ είναι ίσα.



β) Έστω ότι η προέκταση της ΑΜ τέμνει τη ΒΓ στο Δ. Από τα ίσα τρίγωνα ΑΜΒ και ΑΜΓ έχουμε ότι:

$$A\hat{M}B = A\hat{M}\Gamma$$

Άρα ισχύει και ότι:

$$B\hat{M}\Delta = \Delta\hat{M}\Gamma \qquad (1)$$

ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $A\hat{M}B$ και $A\hat{M}\Gamma$. Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι η ευθεία ΑΜ διχοτομεί τη γωνία $B\hat{M}\Gamma$.

8

α) Τα τρίγωνα ΒΑΚ και ΚΑΓ έχουν:
- ΑΒ = ΑΓ, από υπόθεση,
- ΚΒ = ΚΓ, από υπόθεση,
- την ΑΚ κοινή πλευρά.

Από το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα ΒΑΚ και ΚΑΓ είναι ίσα.

β) Από τα ίσα τρίγωνα ΒΑΚ και ΚΑΓ έχουμε ότι:

$$B\hat{A}K = K\hat{A}\Gamma$$

Άρα η ΑΚ διχοτομεί τη γωνία $B\hat{A}\Gamma$.

γ) Έστω ότι η προέκταση της ΑΚ τέμνει τη ΒΓ στο Δ. Από τα ίσα τρίγωνα ΒΑΚ και ΚΑΓ έχουμε:

$$B\hat{K}A = \Gamma\hat{K}A$$

Άρα ισχύει και:

$$B\hat{K}\Delta = \Gamma\hat{K}\Delta$$

ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $B\hat{K}A$ και $\Gamma\hat{K}A$. Συνεπώς η ΚΔ διχοτομεί τη γωνία $B\hat{K}\Gamma$.

9

α) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ έχουν:
- την ΑΕ κοινή πλευρά,
- ΑΒ = ΑΓ, από υπόθεση,
- $\hat{\delta} = \hat{\gamma}$, από υπόθεση.

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ είναι ίσα.

β) Από τα ίσα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ προκύπτει ότι ΕΒ = ΕΓ, άρα το τρίγωνο ΓΕΒ είναι ισοσκελές.

γ) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, η ΑΔ είναι διχοτόμος, άρα είναι ύψος και διάμεσος. Επομένως η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ.

10

α) Ισχύει ότι:

$$\hat{B}_{\varepsilon\xi} = 180° - \hat{B} = 180° - \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$$

διότι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, ως γωνίες προσκείμενες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν:
- ΑΒ = ΑΓ, από υπόθεση,
- ΒΔ = ΓΕ, από υπόθεση,
- $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}E$, δηλαδή $\hat{B}_{\varepsilon\xi} = \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$, από το ερώτημα (α).

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα.

γ) Είναι ΒΜ = ΜΓ (διότι το Μ είναι μέσο του ΒΓ) και ΒΔ = ΓΕ, άρα:

$$BM + B\Delta = M\Gamma + \Gamma E \iff \Delta M = ME$$

Δηλαδή το Μ είναι μέσο του ΔΕ, οπότε η ΑΜ είναι διάμεσος του ΑΔΕ.

11

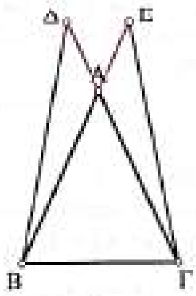
α) Είναι ΑΒ = ΑΓ και ΑΕ = ΑΔ. Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$AB + AE = A\Gamma + A\Delta \iff BE = \Gamma\Delta$$

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν:
- ΑΒ = ΑΓ, από υπόθεση,
- ΑΔ = ΑΕ, από υπόθεση,
- $\Delta\hat{A}B = E\hat{A}\Gamma$, ως κατακορυφήν.

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα, άρα:

$$B\Delta = \Gamma E$$



γ) Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}B \qquad (1)$$

Από τα ίσα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουμε:

$$\Delta\hat{B}A = E\hat{\Gamma}A \qquad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2), προκύπτει ότι:

$$A\hat{B}\Gamma + \Delta\hat{B}A = A\hat{\Gamma}B + E\hat{\Gamma}A \iff \Delta\hat{B}\Gamma = E\hat{\Gamma}B$$

12

α) Έστω ότι $A\hat{O}B = B\hat{O}\Gamma = \Gamma\hat{O}\Delta = \hat{\omega}$. Τα τρίγωνα ΑΟΓ και ΒΟΔ έχουν:
- ΟΑ = ΟΒ, από υπόθεση,
- ΟΓ = ΟΔ, από υπόθεση,
- $A\hat{O}\Gamma = B\hat{O}\Delta$, διότι:

$$A\hat{O}\Gamma = A\hat{O}B + B\hat{O}\Gamma = 2\hat{\omega}$$

και

$$B\hat{O}\Delta = B\hat{O}\Gamma + \Gamma\hat{O}\Delta = 2\hat{\omega}$$

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΟΓ και ΒΟΔ είναι ίσα, άρα ισχύει ότι ΑΓ = ΒΔ.

β) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΟΒΔ (με ΟΒ = ΟΔ), η ΟΜ είναι διχοτόμος (αφού $B\hat{O}\Gamma = \Gamma\hat{O}\Delta$), άρα είναι και διάμεσος. Επομένως το Μ είναι μέσο του ΒΔ.